Ecole Supérieure de Gestion

ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR TECHNIQUE PRIVÉ

CONCOURS D'ENTRÉE 1988

CONCOURS FORMULE ECONOMIQUE et TECHNOLOGIQUE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES I

DUREE : 4 HEURES COEFFICIENT : 3

LUNDI 18 AVRIL DE 14H00 A 18H00

PROBLEME N°I (suites et probabilités)

Deux joueurs A et B jouent à une suite de parties indépendantes. La probabilité de gagner une partie pour A (donc de perdre pour B) est $\frac{2}{3}$.

Le jeu s'arrête dés que l'un des joueurs a gagné deux parties de plus que l'autre. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par q_n, r_n, s_n, t_n, et u_n la probabilité des évènements suivants :

Qn : "la n-ième partie est jouée et A a gagné deux parties de plus que B à l'issue de cette n-ième partie".

Rn : "la n-ième partie est jouée et A a gagné une partie de plus que B à l'issue de cette n-ième partie".

Sn : "la n-ième partie est jouée et les deux joueurs ont gagné le même nombre de parties à l'issue de cette n-ième partie".

Tn : "la n-ième partie est jouée et B a gagné une partie de plus que A à l'issue de cette n-ième partie.

Un : "la n-ième partie est jouée et B a gagné deux parties de plus que A à l'issue de cette n-ième partie.

1°) a) Calculer les valeurs suivantes :
q_1, q_2, r_1, r_2, s_1, s_2, t_1, t_2, u_1 et u_2

b) pour $n \geqslant 3$ prouver que $r_n = \frac{2}{3} s_{n-1}$ et exprimer également s_n et t_n en fonction de r_{n-1}, s_{n-1} et t_{n-1}.

c) calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, s_n, t_n, r_n en fonction de n

2°) pour $n \geqslant 2$, déterminer q_n et u_n en fonction de r_{n-1} et t_{n-1}

3°) Déterminer la probabilité pour que le jeu s'arrête à l'issue de la n-ième partie ($n \geqslant 2$)

4°) Quelle est la probabilité que A gagne le jeu ? (toute réponse non justifiée ne sera pas comptabilisée)

PROBLEME N°II - (algèbre)

Partie I

On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

On appelle u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même (endomorphisme de $\mathbb{R}^3$) dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice A.

1°) soient λ et μ des nombres réels et $\vec{\imath}_1$, $\vec{\imath}_2$, $\vec{\imath}_3$ les trois éléments de $\mathbb{R}^3$ définis par $\vec{\imath}_1 = (1 + \mu, 0, 0)$, $\vec{\imath}_2 = (5, -2\lambda, 2)$ $\vec{\imath}_3 = (-1, \lambda, 2)$.

Pour quelle valeur de λ et μ ces trois éléments forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$? Dans les autres cas, quel est le rang du système qu'ils engendrent?

2°) On note B la base formée par $\vec{\imath}_1$, $\vec{\imath}_2$, $\vec{\imath}_3$ lorsque $\lambda = 1$, $\mu = 0$ trouver la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base B ; calculer P^{-1}

3°) Quelle est la matrice A' de u lorsque $\mathbb{R}^3$ est rapporté à la base B. Pour tout entier $n \geqslant 1$, écrire A'^n.

4°) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a l'égalité suivante : $A'^n = P^{-1} A^n P$

En déduire la matrice A^n.

PARTIE II

A) On définit une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $\vec{v} \longrightarrow f(\vec{v})$ par la donnée des coordonnées X, Y, Z du vecteur $\vec{w} = f(\vec{v})$ en fonction des coordonnées (x, y, z) du vecteur $\vec{v}$.

$X = (1 - m)x + (2m + 1)y + (2m + 2)z$
$Y = mx + my$, $Z = 2x + (m + 1)y + (m - 1)z$

T.S.V.P.

Montrer que le rang de f est 3, sauf pour les valeurs particulières de m qu'on déterminera. Pour ces valeurs particulières, précises la valeur du rang de f et définir le sous-espace f ($\mathbb{R}^3$), en déterminant les relations liant X, Y, Z coordonnées d'un vecteur de f($\mathbb{R}^3$).

B) Soit le vecteur $\vec{w}_o = (x_o, y_o, z_o) = (m, 2m + 2, m^2 - 2m + 9)$ de $\mathbb{R}^3$, résoudre en discutant suivant les valeurs du paramètre m, l'équation $f(\vec{v}) = w_o$ (c'est à dire $f(x,y,z) = (x_o, y_o, z_o)$

PARTIE III

1) Soit u l'application linéaire sur $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie dans les bases canoniques sur $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ par la matrice.

$$\begin{bmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

a) On note Im (u), l'image de u. Trouver la dimension sur $\mathbb{R}$ de Im (u). Trouver une base de Im (u) sur $\mathbb{R}$

b) trouver la dimension du noyau de u

c) trouver une base du noyau de u

2°) Soient a, b, c, m des paramètres réels et soit v l'application linéaire sur $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie dans les bases canoniques sur $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ par la matrice :

$$\begin{bmatrix} -11 + ma - b + c & 7 - ma - c & 0 & 3 - ma - b - c \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Calculer les déterminants des matrices d'ordre 3 extraites de cette matrice.

b) Déterminer la dimension sur $\mathbb{R}$ de l'espace vectoriel Im (v) pour les différentes valeurs des paramètres a, b, c, m. Trouver une base de Im (v) sur $\mathbb{R}$ pour les différentes valeurs des paramètres a, b, c, m.

PROBLEME N° III - (calcul intégrale et récurrence)

Partie I

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1 - x^2}\, dx$

1) Quelle est la signification géométrique de I_0 ? en déduire la valeur de I_0 et calculer I_1 .

2) Montrer que $\forall n \geq 2$ on a $I_n = \frac{n-1}{n+2} I_{n-2}$

3) En déduire la valeur de I_n en fonction de n (on distinguera selon la parité de n).

4) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite positive, décroissante et que cette suite converge vers zéro.

5) Montrer que $n(n+2).(n+1)\, I_n \cdot I_{n-1}$ est indépendant de n et calculer sa limite. En déduire un équivalent simple de I_n lorsque $n \longrightarrow +\infty$

6) On considère maintenant une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, à valeur dans $\mathbb{R}^+$, continue décroissante et telle que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge.

Montrer que $S_n = u_1 + u_2 + \ldots u_n$ avec $u_i = \frac{1}{i} \int_i^{i+1} x f(x)\, dx$ est convergente et majorer cette somme.

PARTIE II

A) On pose maintenant $I(a, b) = \int_a^b \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^4}}\, dx$

1) Montrer que I (a, b) = I (-b, -a)

2) Prouver la relation : $I(a, b) = I(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})$ pour a et b tels que l'on ait ab > 0

3) Etablir la relation $I(a, \frac{1}{a}) = 0$ pour a > 0

B) Soit $F(p,q) = \int_0^1 x^p (1 - x)^q\, dx$ ou p et q sont deux entiers positifs.

1) Etablir la relation $F(p,q) = \frac{q}{p+1} F(p+1, q-1)$

2) En déduire que $F(p,q) = \frac{p!\, q!}{(p + q + 1)!}$

o o

o

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail